ESSEC

ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION de 1980

MATHEMATIQUES - 2ème épreuve (4h)

(Coef. 4)

Préambule - L'attention des candidats est attirée sur le fait que de nombreux résultats peuvent être obtenus avec très peu de calculs.

I - On note $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont on donnera une base, ainsi qu'une algèbre commutative.

2. Dire pourquoi $M(a,b)$ est diagonalisable.
   On note j et k les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique, supposée orthonormale, de $\mathbb{R}^4$ enclidien, sont respectivement :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de j et k.

   Montrer qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle les matrices de j et k sont toutes les deux diagonales : déterminer effectivement une telle base et écrire les matrices de j et k dans cette base.

   En déduire les valeurs propres de $M(a,b)$ et une matrice P orthogonale telle que $P^{-1} M(a,b) P$ soit diagonale.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $[M(a,b)]^n$.

.../...

II -

P_1	I_1	P_2
I_4	P_0	I_2
P_4	I_3	P_3

On considère un carré constitué de 9 cases P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, I_1, I_2, I_3, I_4 . Un pion "saute" à l'intérieur de ce carré, "au hasard" d'une case sur l'une des autres cases qui possède avec celle-ci un côté commun. Par exemple :

- de P_0, le pion saute au hasard sur I_1 ou I_2 ou I_3 ou I_4 .
- de P_1, le pion saute au hasard sur I_1 ou I_4 .
- de I_1, le pion saute au hasard sur P_0 ou P_1 ou P_2 .

On suppose que le pion se situe au départ (c'est-à-dire avant le premier saut) sur l'une des cases P_0 ou P_1 ou P_2 ou P_3 ou P_4 .

Où se trouve-t-il, dans ces conditions, après un nombre pair de sauts ? Après un nombre impair de sauts ?

- Pour tout $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, on désigne par p_{j0} la probabilité que le pion se situe sur la case P_j au départ, et pour tout entier k ($k \geqslant 1$), par p_{jk} la probabilité que le pion se situe sur la case P_j à l'issue du $(2k)^{ème}$ saut.
- Pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ et pour tout entier naturel k au moins égal à 1, on désigne par y_{jk} la probabilité que le pion se situe sur la case I_j à l'issue du $(2k-1)^{ème}$ saut.

On note enfin : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \Pi_k = \begin{pmatrix} p_{0k} \\ p_{1k} \\ p_{2k} \\ p_{3k} \\ p_{4k} \end{pmatrix}$, et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad Y_k = \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \\ y_{4k} \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe deux matrices A et B que l'on déterminera, telles que, pour tout entier $k \geqslant 1$: $Y_k = A\,\Pi_{k-1}$ et $\Pi_k = B\,Y_k$.

   Ecrire les deux matrices $F = BA$ et $G = AB$.

2. a - Vérifier que G appartient à l'ensemble E , en déduire G^k pour k entier ($k \geqslant 1$).

   b - $k \in \mathbb{N}^*$, calculer F^k .

.../...

3. a - Soit U une matrice à p lignes, q colonnes, à coefficients complexes. Soit V une matrice à q lignes, p colonnes, à coefficients complexes. Montrer que UV et VU ont mêmes valeurs propres non nulles.

   b - En déduire les valeurs propres de F .

   c - F est-elle diagonalisable ?

   d - S'il existe une position initiale du pion telle que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, Π_k ne dépende pas de k , que valent nécessairement Π_k et Y_k . Quelle est cette position initiale ?

4. a - Quelle est la probabilité que le pion se situe en P_0 à l'issue d'un nombre pair $(2k)$, non nul, de sauts ? Cette probabilité dépend-elle de la position initiale du pion ? Etait-ce prévisible ?

   b - Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et X_0 la variable aléatoire égale au nombre de passages par P_0 en $(2n)$ sauts. Déterminer la loi de X_0 , son espérance mathématique et sa variance.

   c - Déterminer la loi de probabilité, l'espérance mathématique et la variance, de la variable aléatoire Z_0 égale au nombre de sauts nécessaires pour obtenir un premier passage en P_0 , lorsque le pion se situe au départ sur l'une des cases P_1 ou P_2 ou P_3 ou P_4 .

   d - Quelle est, sous les mêmes hypothèses qu'au c., la probabilité que le pion passe par P_0 . Etait-ce prévisible ?

5. a - Quelle est, en fonction de la position initiale du pion, la probabilité qu'il se situe en P_1 , à l'issue d'un nombre pair $(2k)$, non nul, de sauts ?

   b - $n \in \mathbb{N}^*$; déterminer, en fonction de la position initiale du pion, l'espérance mathématique du nombre aléatoire X_1 de passages par P_1 en $(2n)$ sauts.

   c - $(n,k) \in [\mathbb{N}^*]^2$. On suppose que le pion se situe au départ sur la case P_0 . Déterminer la probabilité que le pion se situe en P_1 à l'issue du $2(n+k)^{\text{ème}}$ saut, sachant qu'il n'est pas sur la case P_1 à l'issue du $(2n)^{\text{ème}}$.

6. Déterminer la loi de probabilité de X_1 (c.f. II-5-b) pour n=3 (6 sauts).

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail